DS 1 - Spé Maths (07/10/2025)

1 Un QCM pour commencer

Cette partie est un QCM. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, une absence de réponse, ou une réponse multiple, ne rapporte ni n'enlève de point.

1. On considère deux suites (u_n) et (v_n) à termes strictement positifs telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et (v_n) converge vers 0. On peut affirmer que :	**a.** la suite $\left(\dfrac{1}{v_n}\right)$ converge.	**b.** la suite (u_n) est croissante.	**c.** la suite $\left(\dfrac{v_n}{u_n}\right)$ est convergente.	**d.** $\lim\limits_{n\to+\infty} (-u_n)^n = -\infty$.
3. On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n). On sait que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et de plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 3$. On peut alors affirmer que :	**a.** la suite (v_n) converge	**b.** si la suite (u_n) est croissante, alors la suite (v_n) est minorée par u_0	**c.** $1 \leqslant v_0 \leqslant 3$	**d.** la suite (v_n) diverge.

4. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 15 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1,2\,u_n + 12 \end{cases}$
La fonction Python suivante, dont la ligne 4 est incomplète, doit renvoyer la plus petite valeur de l'entier n telle que $u_n > 10\,000$.
`def seuil() :`
`    n=0`
`    u=15`
`    while ......:`
`      n=n+1`
`      u=1,2*u+12`
`    return(n)`
À la ligne 4, on complète par :
	a.
	u$\leqslant 10\,000$
		b.
		u $= 10\,000$
			c.
			u$> 10\,000$
				d.
				$n \leqslant 10\,000$

5. On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n non nul : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n}$. On peut alors affirmer que :	**a.** la suite (u_n) diverge	**b.** la suite (u_n) converge	**c.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$	**d.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$
5. On considère une suite (u_n) vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^n \leqslant u_n \leqslant 2 - \dfrac{n}{n+1}$. Alors on peut dire que la suite (u_n) :	**a.** converge vers 2.	**b.** converge vers 1.	**c.** diverge vers $+\infty$.	**d.** n'a pas de limite.

2 Déterminer l'indéterminable

Détailler proprement la détermination de la limite de la suite (x_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \frac{-7n^2 - 12n + 2}{n + 3n^2 + 2025}.$$

3 FAQ ou prépa, une question foireuse ?

Une entreprise a créé une Foire Aux Questions (« FAQ ») sur son site internet.

On étudie le nombre de questions qui y sont posées chaque mois.

Partie A : Première modélisation

Au cours du premier mois, 300 questions ont été posées.

Pour estimer le nombre de questions, en centaines, présentes sur la FAQ le n-ième mois, on modélise la situation ci-dessus à l'aide de la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 3 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n \geqslant 1,\ u_{n+1} = 0,9\, u_n + 1,3.$$

1. Comment pourrait-on interpréter les nombres $0,9$ et $1,3$ dans le contexte de l'exercice ?
2. Calculer u_2 et en proposer une interprétation dans le contexte de l'exercice.
3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n.$$

4. En déduire que la suite (u_n) est croissante.
5. On considère le programme ci-contre, écrit en langage Python. Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(8.5) et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(p) :
    n=1
    u=3
    while u<=p :
        n=n+1
        u=0.9*u+1.3
    return n
```

Partie B : Une autre modélisation

Dans cette partie, on considère une seconde modélisation à l'aide d'une nouvelle suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = 9 - 4,96 \times 0,83^n.$$

Le terme v_n est une estimation du nombre de questions, en centaines, présentes le n-ième mois sur la FAQ.

1. Préciser les valeurs arrondies au centième de v_1 et v_2.
2. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la plus petite valeur de n telle que $v_n > 8,5$.

Partie C : Comparaison des deux modèles

1. L'entreprise considère qu'elle doit modifier la présentation de son site lorsque plus de 850 questions sont présentes sur la FAQ.
   Parmi ces deux modélisations, laquelle conduit à procéder le plus tôt à cette modification ?
   Justifier votre réponse.
2. En justifiant la réponse, pour quelle modélisation y a-t-il le plus grand nombre de questions sur la FAQ à long terme ?

4 Quand suites et fonctions se rencontrent

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3} \; ; \; +\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{4x}{1+3x}$$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer u_1.
2. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3} \; ; \; +\infty\right[$.
3. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   (c) On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.
4. (a) Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E, détermine la plus petite valeur P tel que : $1 - u_P < E$.

```
def seuil(E) :
   u = 0,5
   n = 0
   while ......
      u = .....
      n = n + 1
   return n
```

   (b) Donner la valeur renvoyée par ce programme dans le cas où $E = 10^{-4}$.
5. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$$

   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 4.
   En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.
   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \frac{v_n}{v_n+1}$.
   (c) Montrer alors que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{1}{1+0,25^n}.$$

   Retrouver par le calcul la limite de la suite (u_n).